

* L'expérience montre qu'une perturbation sur un syst en équilibre entraîne des oscillation autour de sa position d'équilibre.

+ Un oscillateur harmonique est un oscillateur dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale et dont la fréquence qui dépend des caractéristiques du système.

* Oscillateur mécanique (ressort, pendule simple ...)

* Oscillateur électrique (circuit RLC ...)

On s'intéresse par les oscillateurs mécaniques.

I. Etude générale d'un oscillateur harmonique :

soit un pt mat. en équilibre stable dans un repère galiléen a une dimension (Mvt axial) écarté de sa position d'équilibre et il est soumis à une force conservative qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre.

$$E_m = E_c + E_p \\ = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x)$$



Autour de la position d'équilibre stable x_0 , $E_p(x)$ peut être écrite :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x-x_0) \cdot \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

x_0 : position d'équilibre stable $\Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \\ \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0 \end{cases}$

$$E_p(x) = E_{p_0} + \frac{1}{2} k (x - x_0)$$

$$\text{où } k = \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_{p_0} + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

M est soumise à une force conservative ; $E_m = \text{cte}$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} \dot{x} + k \dot{x} (x - x_0) = 0$$

$$\dot{x} (m \ddot{x} + k(x - x_0)) = 0$$

$x = 0$ solution qui n'a pas de sens.

$$(M \text{ est en mvt}) \Rightarrow \dot{x} \neq 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} (x - x_0) = 0$$

On pose : $x = x - x_0$

(1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$: c'est l'éq. diff. d'un oscillateur harmonique

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

i/- Eq. horaire de mvt :

la solution de (1) est alors :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

x_m : amplitude max.

ω_0 : pulsation $\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

T_0 : période propre du mvt.

$\omega_0 t + \varphi$: Phase à un instant t .

φ : Phase à $t = 0$

ii/- Détermination de la force conservative appliquée à l'oscillateur :

On a vu que : $E_p(x) = E_{p_0} + \frac{1}{2} k \left(\frac{x - x_0}{x} \right)^2$

Or : $F = -\text{grad } E_p$

$$\Leftrightarrow F(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -k(x-x_0) \vec{e}_x :$$

$= -k X \vec{e}_x$: c'est une force de rappel.

iii/- Energie mécanique d'un oscillateur harmonique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + E_p(x)$$

$$\text{Or } E_p = E_{p_0} + \frac{1}{2} k X^2$$

E_m passant : $E_{p_0} = 0$: l'énergie du système ds sa position d'équilibre.

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} k X^2$$

$$\text{Or : } X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{X} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

en écrivant que : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{m \omega_0^2}{k} X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

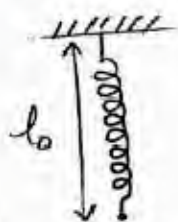
$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$$

Conclusion :

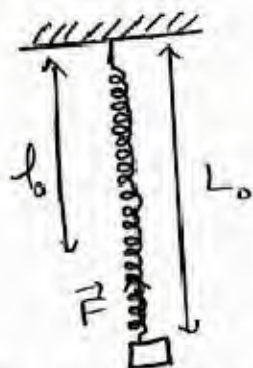
L'énergie mécanique est proportionnelle à l'amplitude maximale du mvmt.

Exemple :

soit un pt $M(m)$:

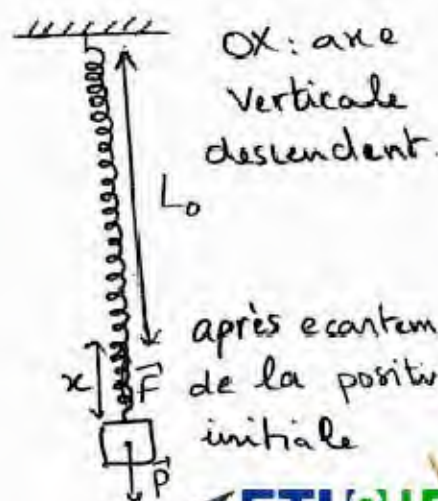


l_0 : longueur à vide du ressort



Etat d'équilibre

l_0 : longueur du ressort



⇒ On cherche l'évolution d'équilibre de x en fonction de y

* A la position d'équilibre : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{F} = mg \vec{e}_x - k(L_0 - l_0) \vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\Rightarrow mg - k(L_0 - l_0) = 0$$

$$mg = k(L_0 - l_0) \quad (*)$$

* Après écartement : M est en mvt.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$mg \vec{e}_x - k(L_0 + x - l_0) \vec{e}_x = m \ddot{x} \vec{e}_x$$

Par projection sur Ox : $mg - k(L_0 - l_0) - kx = m \ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique et

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

II - Oscillateurs libre amorties :

En pratique, les oscillateurs subissent d'une façon générale des frottements qui transforment une partie de l'énergie de l'oscillateur en chaleur.

Il existe plusieurs frottements, on va donc s'intéresser aux frottements visqueux (ex: résistance de l'air).

⇒ la force de frottements visqueux est :

$$\vec{f}_v = -f \cdot \vec{v}$$

où $f > 0$: cste de frottement visqueux (ou coef de viscosité)

II.1 - Equation du mvt :

En plus de la force de rappel, l'oscillation est soumise

à la force f_v

$$\Rightarrow -kX - f\dot{X} = m\ddot{X}$$

$$m\ddot{X} + f\dot{X} + kX = 0$$

\Rightarrow sous sa forme générale, l'équation est :

$$a\ddot{x} + h\dot{x} + bX = c$$

$$\text{ou aussi : } \ddot{X} + \frac{h}{a}\dot{X} + \frac{b}{a}X = \frac{c}{a}$$

où : $a, b, h > 0$ et c est une cste réelle,

$$\text{et si on pose : } \ddot{x} = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

$$\ddot{x} = \frac{b}{a}\dot{X}$$

$$\ddot{x} = \frac{b}{a}\ddot{X}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{h}{a}\dot{x} + \frac{b}{a}x = 0$$

Notation :

$$\text{On pose : } \omega_0^2 = \frac{b}{a} \quad 2\alpha = \frac{h}{a}$$

$$\text{et aussi, on note : } 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} \text{ et } \tau = \frac{1}{\alpha}$$

α : cte d'amortissement.

τ : temps d'amortissement (de relaxation).

Q : facteur de qualité.

ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur.

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (I)$$

c'est l'équation d'un oscillateur libre amorti

II - 2 - Différents régimes du mvt :

Pour résoudre (I) , on cherche l'éq. caract. :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$$

selon le signe de Δ' on distingue différents régimes.

i/- Régime apériodique :

C'est le cas où $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha > \omega_0$ et $Q < \frac{1}{2}$

les racines sont réelles $r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

la solution est :

$$x(t) = e^{-\alpha t} (A e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t})$$

qd $t \nearrow (t \rightarrow +\infty) e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ et

$x \rightarrow 0$: (amortissement sans oscillation)

c'est le régime a périodique.



ii/- Régime pseudo-périodique :

Cas où : $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \alpha < \omega_0$ et $Q > \frac{1}{2}$

les deux racines st complexes :

$$r_{1,2} = -\alpha \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La solution est de la forme :

$$x(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\text{ou : } x(t) = \underbrace{x_0 e^{-\alpha t}}_{X_m(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$

c'est une fonction pseudo périodique d'amplitude variable dans le temps et qui tend vers 0 qd $t \rightarrow +\infty$

$$x(t) = X_m(t) \cos(\omega t + \varphi)$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T est la pseudo-Période)

Or : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \underbrace{\frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}_{\left(2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}\right)}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Caractéristique du mvt :

i/- temps de relaxation τ :

l'amplitude $x_m(t) = x_0 e^{-\alpha t}$

si $t = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x_m = x_0 e^{-1} = \frac{x_0}{e}$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \tau$ C'est le temps pendant lequel

l'amplitude se divise par e .

ii/- Décrément logarithmique δ :

Il est introduit pour caractériser aussi la décroissance de l'ampli
Il est défini par : du mvt.

$$\delta = \frac{1}{n} \log \frac{x(t)}{x(t+nT)} = ?$$

$$x(t) = x_m(t) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t+nT) = x_0 e^{-\alpha(t+nT)} \cos(\omega t + \varphi + 2\pi n)$$

$$= e^{-\alpha nT} x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x(t+nT)} = e^{+\alpha nT}$$

$$n\alpha T = \log \frac{x(t)}{x(t+nT)}$$

\Rightarrow le décrément logarithmique est :

$$\delta = \alpha T \quad (\text{sans unité})$$

plus $\delta \nearrow$ plus

regime pseudo-periodique

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad \varphi = ?$$

$$\delta = \alpha T$$

* facteur de qualité :

Cas où : α est très faible ($\alpha \ll \omega_0$)

Il s'agit de faibles amortissements (prendre : $m = a$
 $k = b$)

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \approx \omega_0^2 \Rightarrow \omega \approx \omega_0 \text{ et } T \approx T_0$$

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

* Energie mécanique de l'osc :

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E_p &= \frac{1}{2} k x^2(t) \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{dx(t)}{dt} = x_0 (-\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi)) \\ &= -x_0 e^{-\alpha t} \left(\underbrace{\alpha \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\gamma_1} + \underbrace{\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}_{\gamma_2} \right) \end{aligned}$$

Or $\alpha \ll \omega_0$ et puisque les fonctions sinus sont bornées (< 1) $\Rightarrow \gamma_1 \ll \gamma_2$

$$E_c = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{or : } k = m \omega_0^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\alpha t} = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad (x_m = x_0 e^{-\alpha t})$$

Calculons maintenant la diminution ^{relative} d'énergie mécanique au cours d'une pseudo-période.

$$r = \frac{\frac{1}{2} K x_0^2 e^{-2\alpha t} - \frac{1}{2} K x_0^2 e^{-2\alpha t} e^{-2\alpha T_0}}{\frac{1}{2} K x_0^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$= (1 - e^{-2\alpha T_0})$$

puisque $\alpha \rightarrow 0$ ($2\alpha T_0$ est faible aussi)

Or : si $x \rightarrow 0 \Rightarrow e^x = 1 + x$

$$\Rightarrow r = 1 - (1 - 2\alpha T_0) = 2\alpha T_0$$

$$2\alpha = \frac{\omega_0}{\varphi} = \frac{2\pi}{\varphi T_0}$$

$$2\alpha T_0 = \frac{2\pi}{\varphi} = r$$

$$\Rightarrow \varphi = 2\pi \cdot \frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T)}$$

conclusion :

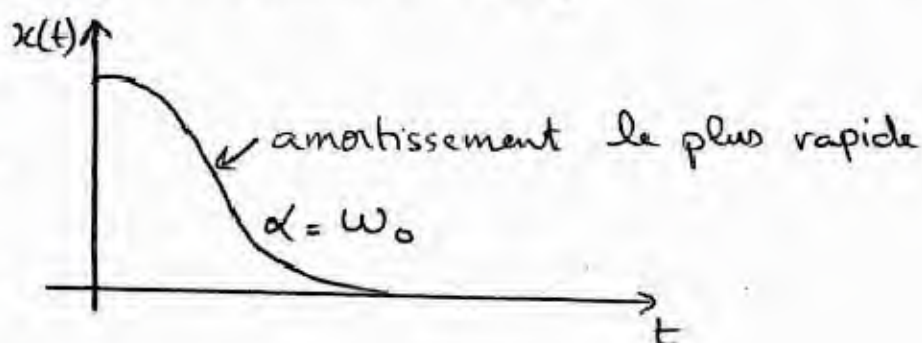
le facteur de qualité traduit alors le rapport de l'énergie de l'oscillateur sur l'énergie perdue par l'oscillateur pendant une pseudo période.

iii/. régime critique :

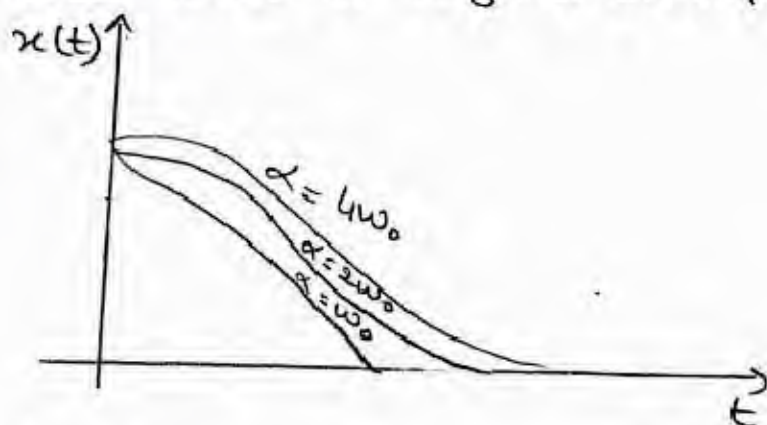
c'est le cas où : $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \alpha = \omega_0$

la solution est alors : $x(t) = (At + B) e^{-\alpha t}$

représentation : $x(t)$



L'amortissement du régime a périodique est plus lent = celui dans le régime critique



Le régime critique est considéré comme cas limite entre le régime pseudo périodique et le régime périodique,

III - Oscillations entretenues (ou forcées) :

Les oscillations vues précédemment s'atténuent au cours du temps à cause des frottements pour maintenir l'amplitude de ces oscillations constantes il faut fournir une énergie égale à celle perdue par les frottements cela peut se faire en appliquant une force appelée excitation sinusoïdale de même direction que le mvt oscillatoire

III-1 Equation du mvt :

Prenons l'ex. (M(m) + ressort).

\Rightarrow le mvt est selon l'axe OX horizontal.

$$P.F.D : \vec{P} + \vec{f}_r + \vec{f}_{pr} + \vec{F}(t) = m \vec{\gamma}(M)$$

$$\text{où } \vec{F}(t) = F(t) \cdot \vec{e}_x$$

Par projection par rapport à OX :

$$-kx - f \cdot \dot{x} + F(t) = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{f}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F(t)}{m}$$

C'est l'éq. d'un mvt oscillatoire forcée.

La solution de cette équation est la somme de :

- la solution de l'éq. ssm $x(t)$ qui traduit le régime transitoire (disparaît pendant une durée),
- la solution particulière qui traduit le régime permanent, peut prendre l'une des trois formes d'un oscillateur libre amorti.

$x_p(t)$:

$$\text{si } F(t) = F_0 \cos(\omega_e t + \varphi_F)$$

$$\Rightarrow x_p(t) = X \cos(\omega_e t + \varphi_x)$$

III - 2. Détermination de X et du déphasage : $\varphi = \varphi_x$

Pour cela, on va associer à :

$$-x_p(t) \longrightarrow \bar{x}_p(t) = X e^{i(\omega_e t + \varphi_x)}$$

$$\text{et pour } F(t) \longrightarrow \bar{F}(t) = F_0 e^{i(\omega_e t + \varphi_F)}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_p(t) = \bar{X} e^{i\omega_e t} \text{ et } \bar{F}(t) = \bar{F}_0 e^{i\omega_e t}$$

$$\text{où } \bar{X} = X e^{i\varphi_x} \text{ et } \bar{F}_0 = F_0 e^{i\varphi_F}$$

Remplaçons $\bar{x}_p(t)$ et $\bar{F}(t)$ dans l'éq. ASM.

$$-\omega_e^2 \bar{X} + 2\alpha i \omega_e \bar{X} + \omega_0^2 \bar{X} = \frac{\bar{F}_0}{m}$$

$$X e^{i\varphi_x} \underbrace{(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i 2\alpha \omega_e)}_{\Omega} = \frac{\bar{F}_0}{m} e^{i\varphi_F}$$

$$X \Omega = \frac{F_0}{m} e^{-i\varphi} \quad (\varphi = \varphi_x - \varphi_F)$$

$$X ((\omega_0^2 - \omega_e^2) + i 2\alpha X \omega_e) = \frac{F_0}{m} \cos(\varphi) - i \frac{F_0}{m} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha X \omega_e = -\frac{F_0}{m} \sin \varphi & (1) \\ X(\omega_0^2 - \omega_e^2) = \frac{F_0}{m} \cos \varphi & (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow X = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_e^2}}$$

$$(1) \Rightarrow \sin \varphi < 0$$

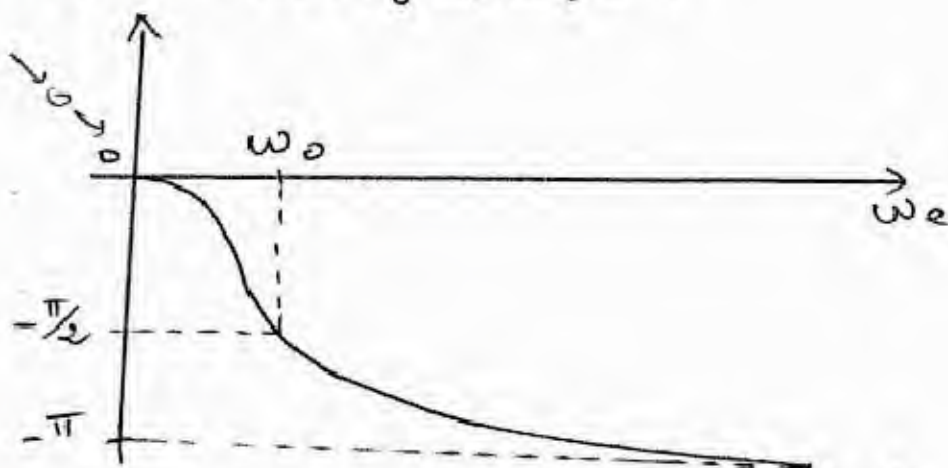
$$(2) \Rightarrow \text{le signe de } \cos \varphi \text{ dépend du signe de } \omega_0^2 - \omega_e^2$$

$$\Rightarrow \text{le déphasage est } < 0 \quad (-\pi < \varphi < 0)$$

Ce qui signifie que la solution de (1) est en retard de phase par rapport à $F(t)$.

$$(1)/(2) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{-2\alpha \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

Représentation graphique :



Pour faible pulsation ω_0 $x_p(t)$ est en phase avec la force.

$\omega_e = \text{cte} = \omega_0 \Rightarrow x_p$ est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $F(t)$ (Elles sont en quadrature de phase).

pour ω très élevé $x_p(t)$ est en retard de π (opposition de phase).

III-3 Etude de la résonance d'amplitude:

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2}}$$

Résonance $\equiv X$ est max pour une pulsation ω_e .

résoudre $\frac{dX}{d\omega_e} = 0$

$$\frac{dX}{d\omega_e} = \frac{2X_0\omega_e(\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2\alpha^2)}{((\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\alpha^2\omega_e^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_e = 0 \quad \text{ou} \quad (\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2\alpha^2 = 0)$$

c.à.d: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 = \omega_r^2$

Or: $\omega_0^2 - 2\alpha^2$ doit être positive.

c.à.d: $\omega_0 > \sqrt{2}\alpha$

puisque: $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \Rightarrow Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$

La variation de $X(\omega_e)$ est aussi:

ω_e	0	ω_r	$+\infty$
$\frac{dX}{d\omega_e}$		+	-
X			

On voit clairement que si:
 $\omega_e < \omega_r \Rightarrow \omega_e^2 < \omega_r^2 \Rightarrow \frac{dX}{d\omega_e} > 0$

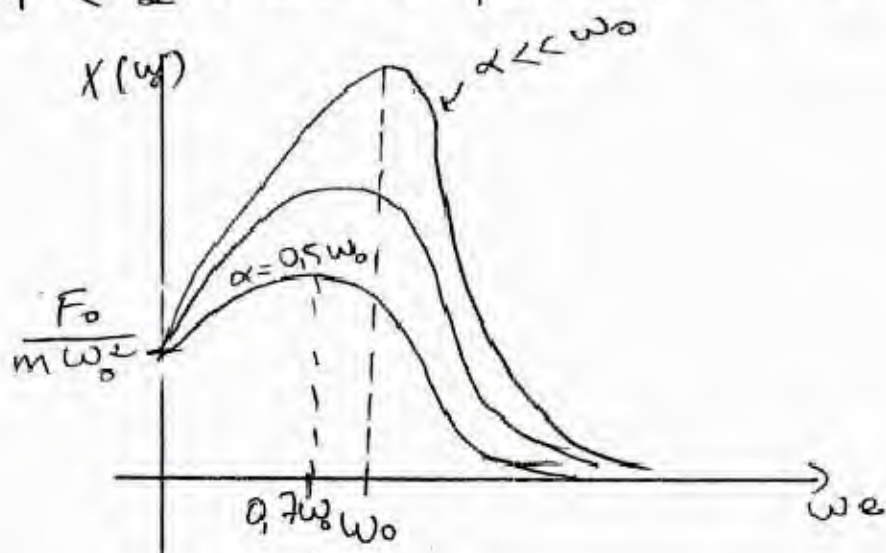
$\omega_e > \omega_r \Rightarrow \omega_e^2 > \omega_r^2 \Rightarrow \frac{dX}{d\omega_e} < 0$

\Rightarrow Il est bien évident que pour $\omega_e = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ l'amplitude est maximale.

\Rightarrow Pour $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ on dit qu'il y a résonance d'amplitude entre l'oscillation et la force d'excitation selon le degré d'amortissement (c.à.d $\alpha \propto \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ on $Q \propto \frac{\omega_0}{\alpha}$)

la résonance est plus ou moins forte.

si $\varphi < \frac{\pi}{2}$, on ne parle plus de résonance



III - 4 Etude énergétique :

1/. Energie perdue par l'oscillateur :

C'est la force de frottement qui est à l'origine de cette perte.

$$P_F = 0$$

Calculons $W(\vec{F}_{fr})$ pendant une période.

$$\begin{aligned} dW(\vec{F}_{fr}) &= \vec{F}_{fr} \cdot d\vec{OM} \\ &= -f \cdot \dot{x} \cdot dx \\ &= -f (\dot{x})^2 dt \end{aligned}$$

$$\text{or : } x(t) = X_m \cos(\omega_e t + \varphi_x)$$

$$\text{or : } \varphi_F = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_x - \varphi_F = \varphi_x$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega_e t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -X_m \omega_e \sin(\omega_e t + \varphi)$$

$$\Rightarrow dW(\vec{F}_{fr}) = -f X_m^2 \omega_e^2 \sin^2(\omega_e t + \varphi) \cdot dt$$

$$\text{or : } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

III.5. Bande passante :

iii, on suppose : $\alpha \ll \omega_0 \Leftrightarrow$ il y a de faibles amortissements.

$$\text{On a : } X(\omega_e) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\alpha\omega_e)^2}}$$

$$\text{lorsque : } \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} = \omega_r$$

$$\Rightarrow \omega_r \approx \omega_0 \quad (2\alpha = \frac{\omega_0}{Q})$$

$$\Rightarrow X_m = \frac{X_0}{\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{Q})^2}} \Rightarrow X_m = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot Q^2$$

la bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est t.q : $X(\omega) \geq \frac{X_m}{\sqrt{2}}$

pour chercher ω_1 et ω_2 :

$$\text{On résoud : } X = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \quad (X > \frac{X_m}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow X^2 = \frac{X_m^2}{2} \Rightarrow (X(\omega_e))^2 = \frac{X_m^2}{2}$$

$$\omega_e^4 - 2\omega_e^2(\omega_0^2 - 2\alpha^2) + \omega_0^2 - 8\alpha^2\omega_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta' &= (\omega_0^2 - 2\alpha^2)^2 - \omega_0^4 + 8\alpha^2\omega_0^2 \\ &= \omega_0^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + (2\alpha^2)^2 - \omega_0^4 + 8\alpha^2\omega_0^2 \\ &= 4\alpha^2\omega_0^2 + (2\alpha^2)^2 \\ &= 4\alpha^2(\omega_0^2 + \alpha^2) \end{aligned}$$

$$\text{or } \alpha \ll \omega \Rightarrow \Delta' = 4\alpha^2\omega_0^2$$

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 + \sqrt{4\alpha^2\omega_0^2}$$

$$\text{ou } \omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 - \sqrt{4\alpha^2\omega_0^2}$$

$$v(\vec{f}_{fr}) = - \frac{f X_m^2 \omega_e^2}{2} \left[\int_0^T dT - \int_0^T \cos 2\alpha dt \right]$$

$$W(\vec{f}_{fr}) = - \frac{f X_m^2 \omega_e^2 T}{2} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega_e} \right)$$

ii- Energie gagnée par l'oscillateur

cherchons le travail de \vec{F}_e pendant une période:

$$dW(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot d\vec{OH}$$

$$= F_e \cdot \dot{x} dt$$

$$\Rightarrow = - F_0 \cos \omega_e t (X_m \omega_e \sin(\omega_e t + \varphi))$$

$$\text{Or } \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\Rightarrow dW_e(\vec{F}_e) = - \frac{F_0 X_m \omega_e}{2} [\sin(2\omega_e t + \varphi) + \sin \varphi] dt$$

$$\Rightarrow W(\vec{F}_e) = - \frac{F_0 X_m \omega_e}{2} \left[\int_0^T \sin(2\omega_e t + \varphi) dt + \int_0^T \sin \varphi dt \right]$$

$$= - \frac{F_0 X_m \omega_e}{2} \sin \varphi \cdot T$$

$$\text{Or : } 2\alpha X \omega_e = - \frac{F_0}{m} \sin \varphi$$

$$W(\vec{F}_e) = \frac{F_0 X_m \omega_e}{2} \cdot T \left(\frac{2\alpha X \omega_e m}{F_0} \right)$$

$$\text{Or on a : } 2\alpha = \frac{f}{m}$$

$$W(\vec{F}_e) = \frac{f X_m^2 \omega_e^2 T}{2}$$

$$\Rightarrow |W(\vec{f}_{fr})| = |W(\vec{F}_e)|$$

l'énergie perdue par l'oscillateur à cause des frotts

est fournie par la force excitatrice : On dit que

les oscillations sont entretenues

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \omega_0 \pm 2\alpha \omega_0 \quad (2\alpha = \frac{\omega_0}{\varphi})$$

$$= \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{1}{\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{1e} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\varphi}} \\ \omega_{2e} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\varphi}} \end{cases}$$

$$\alpha \ll \omega_0 \Rightarrow \varphi = \frac{\omega_0}{2\alpha} \gg 1 \quad (\varphi \text{ élevée})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varphi} \ll 1$$

$$\text{Or : } (1+a)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{a}{2} \quad (a \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \omega_{1e} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2\varphi}\right)$$

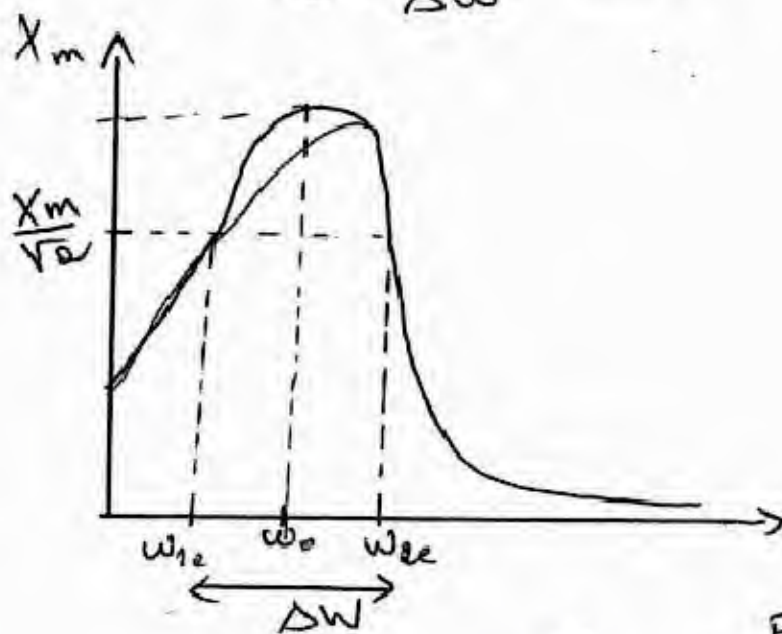
$$\omega_{2e} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2\varphi}\right)$$

$$\text{On calcule : } \Delta\omega = \omega_{2e} - \omega_{1e}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{\varphi} = 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\zeta}$$

$$\text{et on écrit : } \varphi = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$$\zeta = \frac{2}{\Delta\omega} \quad \text{ou } \zeta \cdot \Delta\omega = 2$$



$$X_m = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \varphi$$

plus ΔW est faible, plus le facteur de qualité est grand
+ plus l'amplitude est maximale.



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..